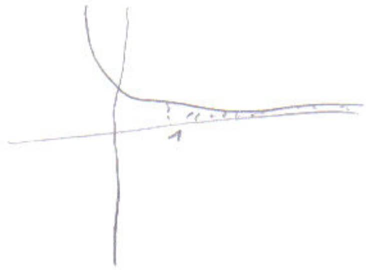
5) $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b \to \infty} \underbrace{\int_1^{B} e^{-x}\,dx}$



$$\left[-e^{-x}\right]_1^{B} = -e^{-B} + e^{-1}$$

$$-e^{-B} \to 0$$

$$= \frac{1}{e}$$

Numerische Integration

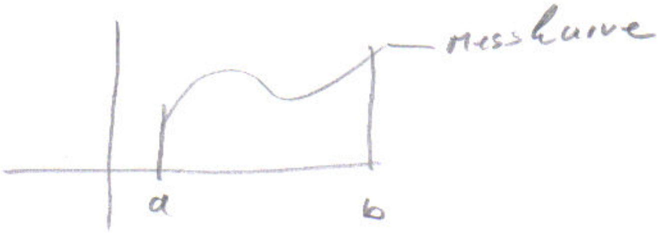
1) Motivation: Nicht jede Fkt besitzt eine aus Standardfkt (ln, e, sin ...) zusammengesetzte Stammfkt.

z.B. $\int e^{x^2}\,dx$

2) Integral über Messkurve $y = f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx$

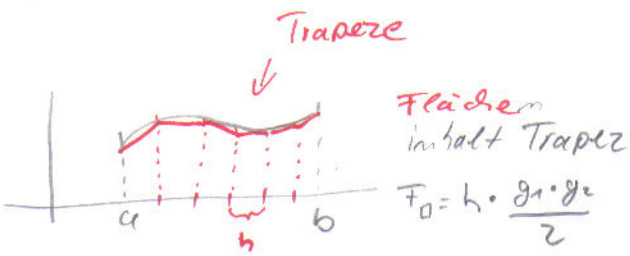
$f(x) = ?$ unbekannt

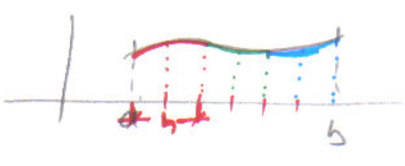


Idee: Ersetzen der Kurve $y = f(x)$

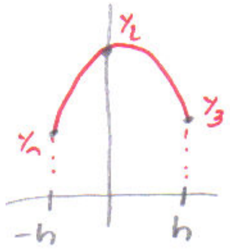
a) Polygonzug

b) durch Parabelbogen





Parabelbogen: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$



$F_{\Box} = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$

Trapezregel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{m-1} + y_m}{2}\right) = \boxed{h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots y_{m-1} + \frac{y_m}{2}\right)}$$

wobei $h = \frac{b-a}{m}$, $y_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$

Simpson-Regel

$h = \frac{b-a}{m}$!m muss gerade sein!

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_m + 2\underbrace{(y_2 + y_4 \dots y_{m-2})}_{\text{gerade } \neq 0,m} + 4\underbrace{(y_1 + y_3 \dots y_{m-1})}_{\text{ungerade}}\right)}$$

Speziell: $n=2$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)}$$

Beispiel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,dx$$

Trapez-R: $n=3$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,dx \approx \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{h}\left(\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \frac{e}{2}\right) \approx 3{,}08$$

$\boxed{\text{genau: } 3{,}10435}$

$$y_i = f(x_i)$$

Simpson: $n=2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\,dx \approx \underbrace{\frac{\pi}{12}}_{\frac{h}{3}}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) = \frac{\pi}{12}\left(1 + 4e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + e\right) \approx 3{,}097$$

(besser als Trapezregel)

7. Reihen

Def:

Es sei $a_0, a_1, \dots$ eine Folge

(1) Dann heißt
$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

eine unendliche Reihe.

Abk: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ oder $a_0 + a_1 + a_2 \dots$

$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt eine Partialsumme der Reihe

(2) Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ heißt konvergent gegen s,

wenn $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ gilt

kurz: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s$

Beispiel

1) $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 \dots + q^n$

$$s = 1 + q + q^2 \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Für $|q| < 1$ ist $\lim_{n \to \infty} q^{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}}$$ (geometrische Reihe)

2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty$ divergent

harmonische Reihe

3) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$

konvergent

alternierend harmonische Reihe

siehe später

4) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ konvergent

siehe später

Rechenregeln:

Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergent. Dann gilt

1) $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)$ konvergent und

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

2) $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} a_i$

Satz 7.1.8

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent $\Rightarrow \lim_{i \to \infty} a_i = 0$

Anwendung:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{i}{i+1}}_{a_i}$$

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \lim_{i \to \infty} \frac{i}{i+1} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Satz $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ divergent

7.2. Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 7.2.17 (Leibniz-Kriterium)

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \dots \qquad a_i > 0$$

alternierende Reihe

ist konvergent, wenn a_0, a_1 eine monotone Nullfolge ist. (d.h. $\lim_{i \to \infty} a_i = 0$)

Beispiele:

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

$$\underbrace{\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} = 0 \quad ; \frac{1}{i} > \frac{1}{i+1}}_{\text{konvergenz}}$$

$$\sum (-1)^{i+1} \frac{1}{i^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - + \dots$$

konvergent

Satz 7.2.1 (Majoranten Kriterium)

Gilt für die Glieder der Reihen

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i , \sum_{0}^{\infty} b_i$: $0 \leq a_i \leq b_i , \; i \geq i_0$

dann gilt:

a) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$; konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergent

b) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$; divergent $\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ divergent

($\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ heißt Majorante zu $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$)

Beispiel

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ konvergent

$\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$ und $\underbrace{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{Majorante zu } \sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}}$ konvergent s.o

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ konvergent

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \underset{\Downarrow \atop > \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underset{\Downarrow \atop > \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ div.}$$